

Analyse d'une classe d'échelles

I - INTRODUCTION.

Le point de départ de ce travail a été l'étude de l'ouvrage de B. Matalon "L'Analyse Hiérarchique" (cf. [6]). Notre premier but consistait à dégager et à préciser les différentes notions et méthodes en leur donnant une formulation mathématique ; ce faisant nous avons retrouvé le cadre mathématique dans lequel se posent les problèmes les plus généraux de l'Analyse Hiérarchique ; l'étude dans ce cadre de ces problèmes nous a permis de traiter certaines questions laissées ouvertes.

C'est improprement que le terme d'analyse hiérarchique a pu désigner une analyse des données résultant d'une hiérarchie de classifications ; il s'agit, comme le titre de ce chapitre l'indique, d'une analyse ordinale d'une classe d'échelles. Chaque échelle d'attitude qui représente un caractère dont l'ensemble des modalités est totalement ordonné, que nous appellerons également ci-dessous "item total", définit un préordre total sur l'ensemble défini par la population étudiée. Relativement à une même classe d'échelles recouvrant une même "dimension" sous-jacente ; le problème de l'analyse hiérarchique uni-dimensionnelle consiste, à partir du comportement de la population, à ordonner totalement l'ensemble de toutes les modalités des diverses variables, formant ainsi une échelle fine d'attitude. Ce problème, le Psycho-Sociologue le considérait à propos d'une classe d'échelles posée a priori pour laquelle il postulait l'existence d'une même "variable sous-jacente" ; il est moins contestable et plus naturel de poser le problème de l'analyse hiérarchique relativement à une classe d'échelles extraite d'une classification portée sur un ensemble de telles variables ; I. Cohen (thèse de 3ème cycle) a illustré cette démarche dans le cadre d'une importante enquête psycho-pédagogique (voir partie II réservée à l'étude d'exemples réels).

Les Spécialistes de l'analyse hiérarchique se sont longtemps et surtout préoccupés du cas des items dichotomiques (i.e. échelles à deux modalités). Ce travail se situe d'emblée dans le cas d'échelles à nombre quelconque de modalités : chaque échelle étant représentée par un ordre total sur l'ensemble de ses modalités ; le support de l'information est le treillis distributif gradué produit fini d'ordres totaux finis. Un même sommet du treillis sera appelé, lorsque nous emprunterons le langage des praticiens de ces méthodes, "patron de réponse" ; patron étant la traduction adoptée du mot anglais "pattern".

La possibilité d'erreur dans la réponse d'un sujet à un item passe le problème du choix de la "bonne" échelle hiérarchique permettant au "mieux" de ranger totalement l'ensemble des divers comportements élémentaires proposés à travers les différents items. Une première partie de notre travail aboutira à la proposition d'un algorithme ayant un caractère optimal, qui, en un "petit" nombre de pas, détermine l'échelle hiérarchique qui s'ajuste le "mieux" à l'ensemble des patrons de réponse observés. Cet algorithme repose naturellement sur une certaine idée de la "distance" entre deux patrons de réponse et entre un patron de réponse et une échelle hiérarchique ; cette idée de la distance se traduisant mathématiquement au niveau du treillis de représentation. Nous avons proposé trois distances et adapté l'algorithme à deux d'entre elles ; l'adaptation à la distance que nous désignons par d_3 (la plus classique) a été effectuée par M. Barbut (cf. [1]). Nous montrons ainsi, par rapport à l'état de la question tel que rapporté dans l'ouvrage de B. Matalon, comment remplacer le tâtonnement par la recherche systématique et comment distinguer un degré d'erreur dans la réponse d'un sujet à un item par le choix judicieux, tenant compte du problème particulier traité, de l'une des trois distances.

La deuxième partie de ce travail propose, à partir d'un modèle probabiliste assez général de l'erreur dans la réponse d'un sujet à un item, une voie par laquelle peut se faire le raccord entre analyse hiérarchique au sens de L. Guttman et analyse de la structure latente au sens de P. Lazarfeld (voir dans [6] et dans [9]).

La notion de "dimension" telle que la comprend l'Analyse hiérarchique multidimensionnelle nous amène à développer certains aspects combinatoires d'un ordre partiel sur un ensemble fini (dimension d'un ordre, nombre de stabilité interne, théorème de Dilworth) ; c'est ce que nous faisons dans le cadre d'une annexe où nous établissons notamment un théorème permettant l'énumération du nombre de sommets par niveau du treillis gradué produit fini d'ordres totaux finis. L'analyse informatique, devant conduire aux algorithmes ci-dessus mentionnés, a rendu nécessaire ce théorème.

II - DEFINITIONS ET REPRESENTATION MATHEMATIQUE.

1. DEFINITIONS GENERALES.

Nous allons présenter ici, en le précisant, le vocabulaire de l'analyse hiérarchique.

On appelle "item" la donnée d'un ensemble fini de comportements proposés. Une modalité de l'item est un élément de l'ensemble ; c'est-à-dire, un comportement proposé. On distingue habituellement les items dichotomiques des items non dichotomiques. Un item est dichotomique, si le nombre de ses modalités est deux et ne l'est pas, si le nombre de ses modalités est strictement supérieur à deux. L'item est dit *présentant k modalités* si le nombre de ses modalités est k.

Nous supposons qu'est définie sur l'item ; c'est-à-dire, sur l'ensemble des comportements proposés, une relation d'ordre ; cette relation d'ordre est en général une relation de préférence par rapport à un but donné de caractère psychologique social ou autre. Si l'item est totalement ordonné par la relation d'ordre définie, il sera dit *total*.

Nous nous intéresserons seulement aux items totaux, nous ne restreignons pas ainsi la généralité de notre étude parce qu'on peut toujours se ramener à ce cas en réalisant une partition de l'item non total en sous items totaux. Notons $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ la suite des modalités de l'item total a ; où on a

$$a_0 < a_1 < \dots < a_j < \dots < a_{k-1},$$

la modalité a_j est dite avoir le "code" j .

Exemples :

1) La question "lisez-vous le journal J ?" définit un item dichotomique ; les deux modalités de l'item sont : a_0 = non lecture du journal J, a_1 = lecture du journal J.

2) Si vous aviez plus de temps, est-ce que vous pensez que vous vous mettriez à lire le journal J de façon régulière ?

	code
Non, surement pas	0
Non, probablement pas	1
Oui, probablement	2
Oui, certainement	3

Cet item est total et présente quatre modalités.

2 - VARIABLE SOUS JACENTE A UN ITEM TOTAL.

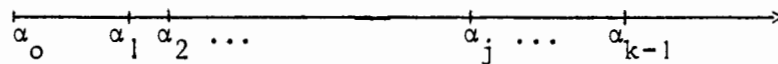
Soit un item total a présentant k modalités : $a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1}$. On admet l'existence d'une échelle dense^(*) de valeurs α que nous représenterons par un demi-axe orienté de gauche à droite. La variable α est liée à l'item a de la façon suivante : un sujet donné répond à l'item a par la modalité a_j si et seulement si, la valeur de la variable, mesurée sur le sujet, est comprise entre deux bornes α_j et α_{j+1} , *indépendantes du sujet* ; $\alpha_j \leq \alpha < \alpha_{j+1}$.

On pose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_k = +\infty$; d'où

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots < \alpha_k = \infty.$$

L'item a définit ainsi sur l'axe de α une subdivision

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$



(*) Une échelle est dite ici dense dans le sens que Cantor donnait à ce mot pour les types d'ordres : entre deux éléments distincts quelconques x et y de l'échelle, on peut toujours en insérer un troisième z (et par suite une infinité).

Exemples d'échelles denses : l'ensemble Q des rationnels (fractions), l'ensemble ordonné D des nombres décimaux.

La variable α est dite sous-jacente à l'item a.

Bien qu'elles nous soient inconnues, les bornes α_j sont supposées fixées par la donnée de l'item. Par la suite nous montrerons comment déterminer statistiquement les nombres α_j dans le cadre d'un modèle probabiliste qui suppose *continue* l'échelle α .

3. ENSEMBLE D'ITEMS TOTAUX SE REFERANT A UNE MEME VARIABLE.

3.1. Introduction.

Pour fixer les idées considérons un ensemble de deux items totaux a et b présentant respectivement h et k modalités :

$$a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_{(h-1)} \quad \text{et} \quad b_0 < b_1 < \dots < b_j < \dots < b_{(k-1)} .$$

Désignons a priori par α la variable sous jacente à l'item a et par β , celle sous-jacente à l'item b. On a, avec des notations que l'on comprend à partir du paragraphe précédent,

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_{h-1} < \alpha_h = \infty \quad \text{et} \quad 0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_j < \dots < \beta_{k-1} < \beta_k = \infty .$$

DEFINITION. Les deux items a et b sont dits relatifs à une même variable sous jacente si on a pu définir une relation d'ordre total R sur la réunion des deux items, compatible avec les relations d'ordre définies respectivement sur chacun des items et pour laquelle :

$$a_i R b_j \iff \alpha_i \leq \beta_j .$$

Pratiquement, la relation R est une relation de préférence vis à vis d'un but donné ; celui pour lequel ont précisément été établis chacun des deux items a et b.

Chacun des deux items définit, sur le demi-axe de la variable commune que nous noterons alors γ , une subdivision. Celle définie par l'item a, est $(0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}, \infty)$ et celle définie par b, est $(0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \infty)$.

L'item a sera dit plus *fin* que l'item b, si la subdivision définie par a est plus fine que celle définie par b ; en d'autres termes si ; pour tout j, il existe i tel que $\alpha_i = \beta_j$.

3.2. Composition d'items relatifs à une même variable sous-jacente.

Soient deux items a et b ; reprenons ceux que nous venons de considérer ci-dessous. Désignons par $(0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{h+k-2}, \infty)$ où γ_ℓ est la valeur de rang ℓ dans la suite ordonnée croissante des valeurs α_i et β_j .

Au couple d'items (a,b) faisons correspondre l'item $c = a*b$ défini comme suit : si $\gamma_\ell = \alpha_i$ (resp. β_j) ; la modalité de code ℓ de l'item c est a_i (resp. b_j). L'item c est dit *composé* des items a et b. La loi de composition ainsi définie entre items totaux se référant à une même variable sous-jacente, est associative et commutative.

En n'admettant pas d'erreur possible de la part d'un individu donné ; la condition nécessaire et suffisante pour que cet individu réponde à

l'item c par la modalité c_ℓ est que la valeur de la variable sous-jacente γ mesurée sur le sujet soit comprise entre γ_ℓ et $\gamma_{\ell+1}$. Dans le cas où on a pour cette valeur mesurée, $\alpha_i \leq \gamma < \alpha_{i+1}$ et $\beta_j \leq \gamma < \beta_{j+1}$; alors $\gamma_\ell = \sup(\alpha_i, \beta_j)$ et $\gamma_{\ell+1} = \inf(\alpha_{i+1}, \beta_{j+1})$ car les deux intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et $[\beta_j, \beta_{j+1}[$ ayant une intersection non vide, il n'existe pas de points α_ℓ ou β_m entre $\sup(\alpha_i, \beta_j)$ et $\inf(\alpha_{i+1}, \beta_{j+1})$.

Notons que l'équation $a*x = b$ a une solution si et seulement si la subdivision définie par a est moins fine que celle définie par b .

Considérons le cas particulier important de la composition d'items dichotomiques. Soient b_1, b_2, \dots, b_{m-1} ; $(m-1)$ items dichotomique se référant à une même variable sous-jacente. L'item $c = b_1 * b_2 * \dots * b_{m-1}$ est un item total à m modalités en général; la subdivision définie par l'item b_j étant $(0, \beta_j, \infty)$, celle définie par c est $(0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_{m-1}, \infty)$.

Exemple. b_1, b_2, \dots, b_{m-1} peuvent être définis à partir de $(m-1)$ questions d'un problème de mathématique s'échelonnant par difficulté croissante: la j -ème question fait intervenir toute l'aptitude requise pour la solution de la question $(j-1)$. La modalité codée 0 de l'item b_j est une réponse incorrecte à la question n° j . L'item $c = b_1 * b_2 * \dots * b_{(m-1)}$ con- la suite totalement ordonnée des modalités suivantes :

	code
réponse incorrecte à la question n° 1	0
réponse correcte à la question n° 2	1
réponse correcte à la question n° 3	2
⋮	
réponse correcte à la question n° $(m-1)$	$(m-1)$

Réciproquement, on peut aisément définir une décomposition d'un item total présentant m modalités en $(m-1)$ items dichotomiques totaux. En effet; à partir de l'item a présentant m modalités totalement ordonnées: $a_0 < a_1 < \dots < a_j < \dots < a_{m-1}$, on définit la suite $(b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_{m-1})$ des items dichotomiques où l'item b_j consiste en la partition en deux classes R_j et S_j de l'ensemble des comportements proposés par l'item a , où $R_j = \{a_0, a_1, \dots, a_{j-1}\}$ et $S_j = \{a_j, a_{j+1}, \dots, a_{m-1}\}$. La modalité de code 0 (resp. 1) correspond à une réponse à l'item a par un comportement appartenant à R_j (resp. S_j). Si $(0, \alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{m-1}, \infty)$ est la subdivision définie par l'item a ; celle définie par l'item b_j est $(0, \alpha_j, \infty)$.

Nous allons abandonner maintenant cette approche avant de la reprendre plus richement dans le cadre d'une hypothèse générale de la distribution de la variable sous-jacente sur la population étudiée et d'un modèle probabiliste cohérent de l'erreur dans la réponse d'un sujet à un item. Cette construction nous permettra alors de déterminer statistiquement les points de la subdivision sur l'axe de la variable sous-jacente à l'item.

4. TREILLIS DE REPRESENTATION.

En vue de l'analyse du comportement d'une population donnée de sujets relativement à un but fixé, on suppose établi un ensemble fini d'items totaux

$$\{a^j / 1 \leq j \leq m\}, \quad (a^j : a \text{ indice supérieur } j) .$$

Chaque a^j est un ensemble fini totalement ordonné ; à $\{a^j / 1 \leq j \leq m\}$, associons le produit fini d'ensembles finis totalement ordonnés

$$\prod_{1 \leq j \leq m} a^j = a^1 \times a^2 \times \dots \times a^m, \quad (1)$$

qui sera l'ensemble de représentation.

À a^j associons l'ensemble $\Omega_j = \{0, 1, 2, \dots, r_j\}$ des codes de ses éléments ($\text{card}(a^j) = r_j + 1$) que nous représentons géométriquement par l'intervalle commençant $[0, r_j]$ de \mathbb{N} dont nous ne retiendrons que la structure ordinaire.

À l'ensemble $\prod_{1 \leq j \leq m} a^j$ se trouve associé l'ensemble produit

$$\Omega = \prod_{1 \leq j \leq m} \Omega_j = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_m, \quad (2)$$

dont les éléments sont les points ω :

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_m)$ où ω_j est le code d'une modalité de l'item a^j ;

$$\omega_j \in \Omega_j, \quad 0 \leq \omega_j \leq r_j .$$

Ω sera dans ces conditions représenté géométriquement par le paralléloèdre de \mathbb{N}^m : $[0, r_1] \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_m]$.

Sur Ω , on définit la relation d'ordre produit $\omega \leq \omega'$:

$$(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_m) \leq (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_j, \dots, \omega'_m) \iff (\forall j), \omega_j \leq \omega'_j . \quad (3)$$

ω' succède à ω si $\omega \leq \omega'$ et si pour tout j $\omega_j = \omega'_j$ sauf pour un seul j_0 où $\omega'_{j_0} = \omega_{j_0} + 1$.

Les deux lois de composition interne \vee et \wedge (supremum et infimum)

$$\omega \vee \omega' = \sup(\omega, \omega') \quad \text{et} \quad \omega \wedge \omega' = \inf(\omega, \omega'),$$

confèrent à Ω une structure de treillis distributif dont le minorant universel est le point $(0, 0, \dots, 0)$ et le majorant universel, le point (r_1, r_2, \dots, r_m) .

Une chaîne du treillis est une suite de sommets $(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(k)})$ de Ω totalement ordonné par la relation d'ordre (3) : $\omega^{(1)} \leq \omega^{(2)} \leq \dots \leq \omega^{(k)}$. La chaîne est maximale si pour tout i , $1 \leq i \leq (k-1)$, $\omega^{(i+1)}$ succède à $\omega^{(i)}$;

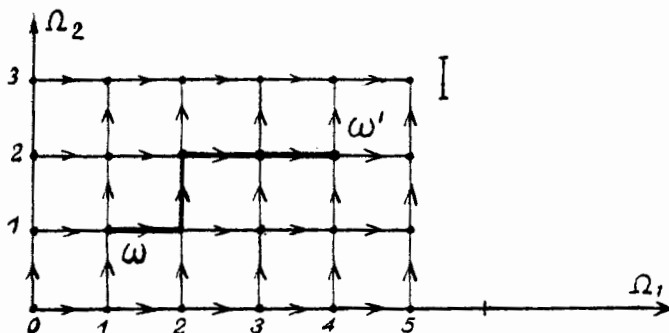
La longueur d'une chaîne maximale ayant k sommets est $(k-1)$. Toutes les chaînes maximales reliant deux sommets de Ω ont même longueur. La longueur commune de tous les chemins rejoignant le point origine $(0,0,\dots,0)$ au sommet ω , sera appelé (pour nous conformer notamment au vocabulaire des praticiens de l'analyse hiérarchique) "score" de ω . La fonction "score" *gradue* le treillis.

On peut naturellement associer à Ω muni de la relation d'ordre (3) un graphe, au sens de Cl. Berge, (cf. [2]), $G = (\Omega, U)$ dont l'ensemble des sommets est Ω et l'ensemble des arcs U ; du point ω sont issus les arcs qui le relient à l'ensemble $\Gamma(\omega)$ de ses successeurs :

$$\Gamma(\omega) = \{(\omega_1, \dots, \omega_{(j-1)}, \omega_j+1, \omega_{(j+1)}, \dots, \omega_m), \omega_j < r_j / 1 \leq j \leq m\} \quad (4)$$

où on a noté $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$.

Dans notre représentation géométrique, nous matérialiserons l'arc joignant $(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_m)$ à $(\omega_1, \dots, \omega_{(j-1)}, \omega_j+1, \omega_{(j+1)}, \dots, \omega_m)$, par le vecteur \vec{v}_j .



Représentation géométrique du graphe associé à $a^1 \times a^2$ où a^1 et a^2 sont des items totaux présentant respectivement 6 et 4 modalités.

La notion de chaîne maximale dans le treillis est celle de *chemin* dans le graphe. Les deux sommets 0 et I de scores 0 et $r_1+r_2+\dots+r_m$ seront appelés extrémités du graphe et tout chemin les reliant sera dit *extrémal*.

Bien que le langage des treillis suffit, nous utiliserons également le vocabulaire, parfois plus souple, des graphes; le contexte sera assez clair pour savoir de quoi nous parlons.

Chaque "patron de réponse" $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ étant représenté par le sommet correspondant du treillis; la représentation de la population de sujets étudiée est une mesure entière positive sur Ω : $\{n_\omega / \omega \in \Omega\}$ où n_ω est le nombre d'individus de la population dont le patron de réponse est ω . Un sommet ω du treillis est dit "patron de réponse *observé*" si la mesure n_ω qui lui est affectée est différente de 0.

Une *échelle relative* à l'ensemble des items totaux $\{a^j / 1 \leq j \leq m\}$ est représentée par une chaîne du treillis; il s'agit d'un ensemble de sommets que peut recouvrir un chemin du graphe $G = (\Omega, U)$.

On dit que "le comportement d'une population donnée de sujets est *uni-dimensionnel* par rapport à l'ensemble des items totaux $\{a^j / 1 \leq j \leq m\}$ " si l'ensemble des patrons de réponse *observés* forme une échelle.

On montre aisément qu'une condition suffisante d'unidimensionnalité du comportement de toute population est que l'ensemble des items $\{a^j / 1 \leq j \leq m\}$ se réfère à une même variable sous-jacente, (cf. § 3 ci-dessus). Désignons par $(\alpha^j) = (0 = \alpha_0^j, \alpha_1^j, \dots, \alpha_i^j, \dots, \alpha_{r_j}^j)$ la subdivision sur l'axe de la variable sous-jacente définie par l'item a^j , $1 \leq j \leq m$; et soit $(0 = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell, \dots, \gamma_{r_1 + \dots + r_m})$ la subdivision associée à la composition $c = a_1 * a_2 * \dots * a_m$ des différents items a^j . En considérant qu'un même point ne peut appartenir à plus d'une subdivision (α^j) ; considérons la chaîne maximale reliant les extrémités du treillis,

$(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(\ell)}, \dots, \omega^{(r_1 + \dots + r_m)})$, définie de la façon suivante: $\omega^{(0)}$ est le sommet dont toutes les coordonnées sont nulles; si le ℓ -ème point γ_ℓ de la subdivision définie par c est un point provenant de la subdivision définie par la j -ème item a^j ; alors le ℓ -ème sommet $\omega^{(\ell)}$ de la chaîne se déduit du précédent $\omega^{(\ell-1)}$ en ajoutant 1 à la j -ème composante:

$$\omega_h^{(\ell)} = \omega_h^{(\ell-1)} \quad (\text{resp.} = \omega_h^{(\ell-1)} + 1) \quad \text{si } h \neq j \quad (\text{resp. si } h=j).$$

Cette chaîne sera dite l'"échelle définie par la suite des items totaux $\{a^j / 1 \leq j \leq m\}$ " laquelle est sensée supporter toute la mesure définie sur Ω lorsqu'on soumet à une population donnée le questionnaire formé par la suite de ces items.

Nous avons pris soin de définir l'unidimensionnalité du comportement d'une population donnée par rapport à un ensemble d'items indépendamment de l'hypothèse d'une même variable sous-jacente. En effet par rapport à un même ensemble d'items, une population donnée peut se comporter de façon unidimensionnelle alors que ce ne sera pas le cas pour une autre, peut être d'ailleurs, plus nombreuse. Inversement, relativement à un ensemble d'items se référant à une même variable (on dit également "formant une échelle"), l'ensemble des patrons de réponse observés d'une population donnée peut, en raison de réponses erronées, ne pas former une échelle; d'où le problème de l'analyse hiérarchique unidimensionnelle.

Le support de la mesure $\{n_\omega / \omega \in \Omega\}$ sur l'ensemble Ω des sommets du treillis; c'est-à-dire $\{\omega \in \Omega / n_\omega \neq 0\}$, est une partie d'un produit fini d'ordres totaux finis; il s'agit d'un ordre partiel sur un ensemble fini. Or tout ensemble fini partiellement ordonné Λ peut apparaître comme une partie d'un produit fini d'ensembles finis totalement ordonnés. Relativement à Λ on définit, fondamentalement, deux nombres entiers. Le nombre δ , *dimension de l'ordre*, est le nombre minimum d'ordres totaux dont Λ peut être considéré comme une partie de leur produit, *le nombre de stabilité* β qui est le nombre minimum de chaînes totalement ordonnées pouvant recouvrir Λ .

La notion de multidimensionnalité en Analyse hiérarchique recouvre la seconde notion et non la première.

Le comportement de la population étudiée par rapport à l'ensemble des items et *k-dimensionnel* si le nombre minimum d'échelles recouvrant l'en-

semble $\{\omega \in \Omega / n_{\omega} \neq 0\}$ des patrons de réponse observés, est k .

Il peut y avoir plus d'un système de k chaînes recouvrant le support de la mesure ; le problème se pose de reconnaître celui des systèmes dont chaque élément représente une échelle d'attitude pour une partie de la population étudiée. Nous proposerons un algorithme qui tient compte de la présence éventuelle de patrons de réponse érronés.

III - ANALYSE HIERARCHIQUE UNIDIMENSIONNELLE.

1. POSITION DU PROBLEME.

La question principale que se pose l'analyse hiérarchique est la suivante : "peut-on admettre que les items totaux a^j , $1 \leq j \leq m$, se réfèrent à une même variable" ? Or nous avons défini l'unidimensionnalité d'un ensemble d'items en supposant qu'il n'existe pas de possibilité d'erreur dans le choix par le sujet de l'une des modalités d'un item (cf. § II.2). On se rend compte du caractère déterministe d'une telle hypothèse qui ne tient pas compte de la présence éventuelle de patrons de réponse "erronés". Il y a lieu de remplacer cette hypothèse par une autre, à caractère probabiliste, dans le cadre de laquelle la probabilité d'un patron erroné est petite sans être exactement nulle.

Dans le cas d'une réponse positive à la question posée, l'ensemble des patrons observés non erronés est une échelle, qu'il faut alors déterminer.

Pour l'estimation de l'échelle nous proposerons deux approches. La première, qui suppose la définition d'une métrique sur Ω , est algorithmique, elle consiste à déterminer celle des échelles qui "s'ajuste le mieux" à l'ensemble pondéré des patrons de réponse observés ; en d'autres termes, à "distance" minimum d'une mesure supportée par une partie du treillis de représentation. Il peut exister plus d'une solution ; d'autre part, une telle estimation est indépendante de l'existence d'une même variable sous-jacente à l'ensemble des items.

La seconde approche consiste à proposer un modèle probabiliste de l'erreur dans le choix par un sujet d'une modalité d'un item. Un tel modèle, dans l'hypothèse d'une certaine distribution (qu'on peut se fixer sans restreindre la généralité) de la variable sous-jacente sur la population étudiée, permet d'une part de déterminer l'échelle ; d'autre part, de définir les probabilités des différents patrons de réponse possibles. D'où la possibilité de tester le modèle.

2. ALGORITHME DE CONSTRUCTION D'UNE ECHELLE.

2.1. Distance adoptées sur Ω .

En vue de la définition de l'"écart" d'un patron de réponse observé à une échelle ; nous allons introduire trois distances sur Ω en utilisant le graphe $G = (\Omega, U)$ de représentation. Considérons pour cela les deux graphes suivants liés à $G = (\Omega, U)$.

1) Le graphe G' , dit symétrisé de G , obtenu en adjoignant à tout arc de G , l'arc inverse ; les deux sommets extrémités sont alors reliés par une *arête*.

2) Le graphe \bar{G} , dit complété de G , obtenu à partir de G en reliant

d'une arête, tout couple de sommets ayant un même prédecesseur ; c'est-à-dire tels que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_m)$ où $\omega_j = \omega'_j$ pour tout j sauf pour deux indices h et h' pour lesquels $\omega_h = \omega'_{h'} + 1$ et $\omega_{h'} = \omega'_h - 1$.

Nous adoptons sur Ω l'une des distances

a) d_1 ; $d_1(\omega, \omega') = 1$ (resp. = 0) si $\omega' \neq \omega$ (resp. si $\omega' = \omega$) .

b) d_2 ; $d_2(\omega, \omega')$ est la longueur du plus court chemin de \bar{G} joignant ω à ω' .

c) d_3 ; $d_3(\omega, \omega')$ est la longueur du plus court chemin de G' joignant ω à ω' .

On rappelle que la longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qu'il contient.

2.2. "Ecart" d'un patron de réponse à une échelle.

Ayant adopté, à partir de considérations concrètes, l'une des trois distances d_1 , d_2 ou d_3 ; la manière qui nous semble la plus "naturelle" pour définir l'écart d'un patron de réponse observé représenté par un sommet ω du graphe à une échelle représentée par un chemin $\&$, est de prendre la distance au sens topologique du sommet ω au sous ensemble de points $\&$; soit

$$e_i(\omega, \&) = \min_{\vartheta \in \&} d_i(\omega, \vartheta) , \tag{1}$$

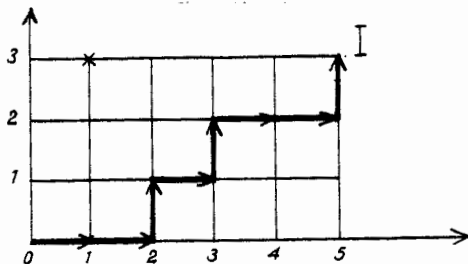
où $i = 1, 2$ ou 3 .

Toutefois pour pouvoir adapter l'algorithme, que nous présenterons bientôt, au cas de la distance d_3 , il est nécessaire (cf. [1]) de définir la distance de ω à $\&$ comme étant la somme pondérée des distances d_3 des différents sommets de $\&$ à ω ; soit

$$e'_3(\omega, \&) = \sum_{\vartheta \in \&} n_{\vartheta} d_3(\omega, \vartheta) . \tag{2}$$

Exemple. Considérons le cas du système représentatif $a^1 \times a^2$, où a^1 et a^2 présentent respectivement 6 à 4 modalités, et l'échelle $\&$ dont les points sont :

$(0,0), (1,0), (2,0), (2,1), (3,1), (3,2), (4,2), (5,2)$ et $(5,3)$.



$$\begin{aligned} e_1 [(1,3), \&] &= 1 \\ e_2 [(1,3), \&] &= 2 \\ e_3 [(1,3), \&] &= 3 \end{aligned}$$

Supposons qu'à partir des réponses de la population étudiée ; la suite des pondérations affectée à la suite des sommets de l'échelle est

7, 5, 12, 11, 23, 15, 10, 8, 2 ;

on a

$$e' [(1,3), \&] = 7 \times 4 + 5 \times 3 + 12 \times 4 + 11 \times 3 + 23 \times 4 + 15 \times 3 + 10 \times 4 + 8 \times 5 + 2 \times 4 .$$

Cherchons quelque indication intuitive sur le choix de l'une des distances.

Si on admet que les différents patrons de réponse observés erronés ont le même "degré d'erreur", on adoptera la distance d_1 .

Si on admet que le "degré d'erreur" du patron de réponse erroné est proportionnel à son "éloignement" du sommet de l'échelle de même score (i.e. situé sur le même niveau du treillis) ; on adoptera la distance d_2 , laquelle donne lieu à la forme analytique suivante de l'écart du sommet ω à l'échelle $\&$;

$$e_2(\omega, \&) = \sum_{1 \leq j \leq m} |\omega_j - \vartheta_j| , \quad (3)$$

où $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ est le sommet de l'échelle de même score que

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ qui représente le patron de réponse erroné. Cette expression se réduit, dans le cas particulier de deux items, à $(|\omega_1 - \vartheta_1| + |\omega_2 - \vartheta_2|)$ qu'il est naturel de considérer si on suppose, qu'un sujet donné, qu'on doit normalement situer au point $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ de l'échelle, qui répond trop fortement à l'un des items, a tendance pour récupérer, à répondre trop faiblement à l'autre item.

La distance mathématiquement la plus classique ; celle, la plus conforme à la structure du treillis de représentation, est la distance d_3 , laquelle donne lieu à la forme analytique suivante de l'écart du sommet ω à l'échelle $\&$;

$$e_3(\omega, \&) = \min_{\vartheta \in \&} \sum_{1 \leq j \leq m} |\omega_j - \vartheta_j| , \quad (4)$$

Ici, l'erreur dans la réponse d'un sujet à un item est considérée indépendamment et de façon additive, de l'erreur dans la réponse du sujet à un autre item.

Les deux critères d'adéquation d'une échelle obtenus respectivement à partir de l'une des distances d_2 ou d_3 , doivent conduire sensiblement au même résultat et ce, d'autant que l'échelle $\&$ s'impose statistiquement.

2.3. Critère d'adéquation d'une échelle.

Une échelle $\&$ est d'autant "meilleure" que la somme pondérée des écarts des sommets de Ω (i.e. des patrons de réponse) à $\&$ est plus petite.

Ayant adoptée l'une des distances d_1 , d_2 ou d_3 ; si on considère la forme (1), la plus naturelle de l'écart d'un patron de réponse observé à une échelle ; la quantité critère s'écrit

$$\sum_{\omega \in \Omega} n_{\omega} e_i(\omega, \&) = \sum_{\omega \in \Omega} n_{\omega} \{ \min_{\vartheta \in \&} d_i(\omega, \vartheta) \} . \quad (5)$$

Si on considère la forme (2) de l'écart, seulement adaptée lorsque la distance choisie sur Ω est d_3 , la quantité critère se met sous la forme

$$\sum_{\omega \in \Omega} n_{\omega} e'_3(\omega, \mathfrak{E}) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{E}} n_{\omega} n_{\mathfrak{A}} d_3(\omega, \mathfrak{A}) . \quad (6)$$

La quantité critère représente une "mesure" du désaccord entre les résultats observés et l'hypothèse d'unidimensionalité. Notons avec intérêt que le critère d'adéquation d'un système de "noyaux" à une partition, utilisé par la suite par E. Diday dans sa méthode des "nuées dynamiques" (cf. chap. 1), est de même nature que ceux que nous présentons.

Remarquons enfin, que pour $i = 1$, (5) représente ce que les praticiens de l'analyse hiérarchique désignent sous le nom de "coefficient de reproductibilité".

2.4. Algorithme.

Il s'agit de déterminer l'échelle, représentée par une chaîne maximale reliant les extrémités du treillis de représentation ; autrement dit, par un chemin du graphe G reliant ses extrémités O et I , qui rend minimum le critère adopté. Pour cela, la méthode la plus directe consiste à affecter à chaque chemin de G rejoignant O et I , la valeur du critère d'adéquation défini et à retenir celui ou ceux des chemins pour lesquels cette valeur est minimum (on peut trouver plus d'une échelle répondant à la question). Dans ces conditions, pour chacun des chemins extrémaux, on aura à calculer la somme pondérée des écarts (5) ou (6) ; or, le nombre total de tel chemins est (cf. annexe) $(r_1 + r_2 + \dots + r_m)! / r_1! r_2! \dots r_m!$. On voit bien que le volume des calculs que nécessite une telle méthode est, en général, particulièrement important, même pour un puissant ordinateur ; d'où le caractère crucial d'un algorithme optimal dont le nombre de pas soit de l'ordre du nombre de sommets du treillis. Cet algorithme, que nous allons exprimer, ne peut s'adapter au cas de la distance d_3 avec la quantité critère (5).

On peut dans ces conditions proposer l'algorithme sous optimal dont la première étape consiste, par une recherche directe, à déterminer l'échelle $b^{(2)}$ relative au couple d'items (a^1, a^2) ; et la i -ème étape, à former l'échelle $b^{(i+1)}$ associée au couple d'échelles $(b^{(i)}, a^{i+1})$; $1 < i < m$.

L'échelle ainsi obtenue, relativement à la suite des items (a^1, a^2, \dots, a^m) peut dépendre de l'ordre dans lequel ont été rangés les items ; elle n'en dépend pas et est optimale si sa restriction à tout couple d'échelles $(a^j, a^{j'})$ est l'échelle optimale résumant a^j et $a^{j'}$.

Nous allons à présent exposer l'algorithme qui en un "petit" nombre de pas permet de déterminer les échelles optimales. Cet algorithme revient à construire, à partir d'une pondération positive des sommets du graphe $G = (\Omega, U)$:

$$\{p_{\omega} / p_{\omega} \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega\} ,$$

le ou les chemins extrémaux les moins pesants ($\sum_{\omega \in \mathfrak{E}} p_{\omega}$ minimum).

Pour fixer les idées nous nous plaçons dans le cas où $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ est un produit de deux ordres totaux finis (associé à un couple (a, b) d'items). Chaque sommet ω de Ω est défini, dans la représentation géométrique du treillis ou du graphe G , par ses coordonnées ; $\omega = (\alpha, \beta)$. A ω est attaché la masse $p(\alpha, \beta)$: nombre réel positif.

La première étape de l'algorithme consiste à affecter aux sommets de Ω une nouvelle pondération $\{r_\omega / \omega \in \Omega\}$ où $r(\alpha, \beta)$ sera le poids du chemin le moins pesant reliant l'origine $(0,0)$ au point $\omega = (\alpha, \beta)$. L'algorithme démarre à partir de l'origine où $r(0,0) = p(0,0)$.

Chaque sommet a un ou deux prédecesseurs. Le nouveau poids $r(\alpha, \beta)$ de (α, β) est la somme de $p(\alpha, \beta)$ et du poids r de son prédecesseur le moins lourd ; soit :

$$\begin{aligned} r(\alpha, \beta) &= p(\alpha, \beta) + \min\{r(\alpha-1, \beta), r(\alpha, \beta-1)\}, \text{ si } (\alpha, \beta) \text{ a deux prédecesseurs} \\ &= p(\alpha, \beta) + r(\alpha-1, \beta), \text{ si le seul prédecesseur de } (\alpha, \beta) \text{ est } (\alpha-1, \beta) \\ &= p(\alpha, \beta) + r(\alpha, \beta-1), \text{ si le seul prédecesseur de } (\alpha, \beta) \text{ est } (\alpha, \beta-1). \end{aligned}$$

De plus, à (α, β) nous attacherons l'indicateur $i(\alpha, \beta)$ qui est un vecteur logique à deux composantes 0 ou 1 ; la composante égale à 1 indiquant le sommet le moins lourd au sens de r , précédant (α, β) ; soit

$$\begin{aligned} i(\alpha, \beta) &= (1, 0) \text{ si } r(\alpha-1, \beta) < r(\alpha, \beta-1) \text{ ou si le seul prédecesseur de } (\alpha, \beta) \\ &\quad \text{est } (\alpha-1, \beta) \\ &= (0, 1) \text{ si } r(\alpha-1, \beta) > r(\alpha, \beta-1) \text{ ou si le seul prédecesseur de } (\alpha, \beta) \\ &\quad \text{est } (\alpha, \beta-1) \\ &= (1, 1) \text{ si } r(\alpha-1, \beta) = r(\alpha, \beta-1). \end{aligned}$$

De la sorte, le point I, extrémité du treillis ou du graphe sera affecté du poids du chemin le moins pesant reliant les extrémités du graphe ; d'autre part la suite, à partir de I, des indicateurs permettra de proche en proche, de retrouver le ou les chemins extrémaux de pondération minimale.

La généralisation de ce qui précède, au cas d'un produit de plus de deux ordres totaux, ne présente aucune difficulté théorique. Cependant, l'application de l'algorithme devient délicate s'il y a plusieurs échelles optimales.

Nous allons à présent pour chacune des distances d_1, d_2 ou d_3 définir la pondération $\{p_\omega / \omega \in \Omega\}$ de telle sorte que le poids r du chemin extrémal représente la valeur du critère d'adéquation de l'échelle définie par ce chemin.

a) Cas de la distance d_1 .

Dans ce cas $p_\omega = (n - n_\omega)$ où $n = \sum_{\omega \in \Omega} n_\omega$ est l'effectif de la population étudiée.

En effet ; de la sorte, l'algorithme minimise $\sum_{\omega \in \mathcal{E}} (n - n_\omega)$, où \mathcal{E} est un chemin extrémal définissant une échelle ; cette quantité est égale, à une constante additive près, $\sum_{\omega \in \Omega} n_\omega e_1(\omega, \mathcal{E})$, (cf. § 2.3).

b) Cas de la distance d_2 .

Désignons par $s(\omega)$ la longueur de la chaîne maximale d'extrémité ω et d'origine, celle du treillis et soit $T(s)$ le niveau du treillis où la fonction "score" prend la valeur s ; en utilisant la représentation géométrique, on a

$$T(s) = \{\omega \in \Omega / \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m = s\}$$

où $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ est la représentation du sommet ω .

A $\omega \in \Omega$, on affectera le poids

$$p = \sum_{\vartheta \in T(s(\omega))} n_{\vartheta} \sum_{1 \leq j \leq m} |\vartheta_j - \omega_j|$$

car de la sorte une échelle optimale minimisera $\sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega}$; c'est-à-dire $\sum_{\omega \in \Omega} n_{\omega} e_2(\omega, \xi)$, (cf. § 2.3).

c) Cas de la distance d_3 .

Ici il s'agit d'affecter la pondération suivante des sommets de Ω (cf. [1]) ;

$$p_{\omega} = \sum_{\vartheta \in \Omega} n d_3(\vartheta, \omega).$$

On montre d'ailleurs, moyennant la relation caractérisant une mesure,

$$p(\omega) + p(\omega') = p(\omega \vee \omega') + p(\omega \wedge \omega'),$$

qu'il suffit de calculer la valeur de p sur chacun des axes représentant Ω_i , pour la déterminer en tout point de Ω .

Avec une telle pondération une échelle optimale minimise $\sum_{\omega \in \Omega} n_{\omega} e_3'(\omega, \xi)$, (cf. § 2.3).

Les méthodes que nous venons d'exposer de détermination de l'échelle sont essentiellement métriques et combinatoires.

3. ECHELLE A PARTIR D'UN MODELE PROBABILISTE.

On se donne une population de sujets et un item total non-dichotomique a présentant $(r+1)$ modalités :

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{j-1} < a_j < \dots < a_r$$

α désigne la variable sous-jacente à l'item a dont on suppose l'échelle des valeurs continue. On a :

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{j-1} < \alpha_j < \dots < \alpha_r$$

en rappelant, l'hypothèse déterministe selon laquelle, un sujet répond à l'item a par la modalité a_{j-1} , si et seulement si la valeur de la variable α : ξ , mesurée sur le sujet est comprise entre α_{j-1} et α_j : $\alpha_{j-1} \leq \xi < \alpha_j$.

Nous allons remplacer cette hypothèse par une hypothèse probabiliste qui tiendra compte d'une possibilité d'erreur dans le choix d'une modalité de l'item par le sujet.

Observer sur le sujet une valeur de la variable sous-jacente α dans l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ c'est avoir comme réponse du sujet à l'item la modalité a_{j-1} ; une telle réponse est exacte si et seulement si la valeur de α mesurée sur le sujet, ξ appartient à l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[$.

Pour un individu donné, dont la valeur de la variable sous-jacente est ξ , nous définissons la probabilité d'observer sur l'individu une valeur inférieure à α_j , $j = 1, 2, \dots, r$, c'est-à-dire la probabilité pour l'indi-

vidu de répondre à l'item par l'une des modalités a_0, a_1, \dots, a_{j-1} . Nous notons cette probabilité $F_\xi(\alpha_j)$, que nous supposons la même pour tout sujet de notre population et que nous appelons "trace sur l'item de la valeur ξ ".

Donnons nous d'autre part, la distribution de la variable sous-jacente sur la population ; elle est définie par une fonction de répartition $G(\xi)$.

A partir de ces données, nous pouvons déterminer en fonction des paramètres α_j , la distribution théorique des différentes modalités de l'item sur la population. Nous allons, rapidement, voir comment sur un exemple.

Nous avons proposé le modèle suivant : la distribution de la variable sous-jacente sur la population est eulérienne :

$$G(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\xi e^{-x} x^{\lambda-1} dx .$$

La "trace sur l'item" de la valeur ξ de la variable sous-jacente est définie par :

$$F_\xi(\alpha_j) = \exp\left\{ \frac{-k\xi}{\alpha_j} \right\}$$

λ est un paramètre d'échelle qu'on peut se fixer arbitrairement une fois pour toutes. Quant au paramètre k on peut le déterminer par la condition "naturelle" suivante : "la probabilité d'observer sur un sujet dont la valeur de la variable sous-jacente est $\xi = \alpha_j$, une valeur inférieure à α_j , est égale à $1/2$ ". D'où la relation:

$$F_\xi(\alpha_j) = \frac{1}{2} ; \text{ soit } e^{-k} = \frac{1}{2} \text{ et } k = \text{Log}_2 ; \text{ ainsi}$$

$$F_\xi(\alpha) = \exp\left\{ -\frac{\text{Log}_2}{\alpha} \xi \right\} .$$

La proportion théorique des sujets dont la valeur observée est inférieure à α_j est

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_j) &= \int_0^\infty e^{-\frac{k\xi}{\alpha_j}} \times \frac{1}{\Gamma(\lambda)} e^{-\xi} \xi^{\lambda-1} d\xi \\ &= \left[\frac{\alpha_j}{k + \alpha_j} \right]^\lambda . \end{aligned}$$

La fréquence théorique de la modalité a_j est $\pi(\alpha_{j+1}) - \pi(\alpha_j)$. En égalant les fréquences des différentes modalités à celles obtenues empiriquement, nous déterminons les valeurs α_j dans le cadre du modèle.

Considérons dans ce cadre, le problème de la détermination de l'échelle relative à un ensemble d'items se référant à une même variable. Plaçons nous dans le cas de deux items a et b , pour fixer les idées, a présente $(r+1)$ modalités et b , $(s+1)$ modalités. Comme il vient d'être dit, la distribution des fréquences des modalités de l'item a (resp. b) sur la population permettra de déterminer, à partir du modèle probabiliste, les va-

leurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$). Constituons la suite ordonnée des valeurs α_i et β_j . La donnée de cette suite détermine l'échelle.

Si on suppose que l'erreur dans la réponse d'un sujet à l'un des items est indépendante en probabilité de l'erreur dans la réponse du sujet à l'autre item. Nous pouvons déterminer la probabilité d'un patron donné pour un sujet pris au hasard dans la population et calculer la fréquence théorique de tout patron. Pour tester l'ajustement du modèle, nous comparerons la distribution des fréquences théoriques, de l'ensemble des patrons possibles, à celle des fréquences empiriques obtenues à l'aide du test d'ajustement du χ^2 à $r.s+1$ degrés de liberté.

IV - ANALYSE HIERARCHIQUE MULTIDIMENSIONNELLE.

Relativement au support $\Lambda = \{\omega/\omega \in \Omega, n_\omega \neq 0\}$ de la mesure, ensemble partiellement ordonné représentant l'ensemble des patrons de réponse observés, rappelons que nous avons défini la *dimension* du comportement de la population comme étant *le nombre minimum de chaînes recouvrant Λ* .

Il est ici important de rappeler l'énoncé du théorème de Dilworth que nous démontrerons en annexe.

L est une *partie libre* d'un ensemble partiellement ordonné Λ , si quel que soit le couple de sommets (ω, ω') de L ; il n'existe pas de chaîne de Λ reliant l'un des sommets à l'autre; en d'autres termes, on n'a ni $\omega \leq \omega'$, ni $\omega' \leq \omega$. Désignons par \mathcal{L} la famille de toutes les parties libres; L_0 est une *partie libre maximale* si

$$\text{card}(L_0) = \max_{L \in \mathcal{L}} \text{card}(L) = \beta.$$

Ce nombre β est dit *de stabilité interne*.

La propriété fondamentale établie par Dilworth et que nous avons d'ailleurs retrouvé dans le contexte de notre travail sur l'analyse hiérarchique est la suivante: "le nombre minimum de chaînes recouvrant Λ est égal au cardinal d'une partie libre maximale".

Il est naturel de chercher à couvrir $\Lambda = \{\omega/\omega \in \Omega, n_\omega \neq 0\}$ à partir d'une partie libre maximale suffisamment chargée au sens de la mesure $\{n_\omega/\omega \in \Omega\}$ en faisant passer par chacun de ses sommets la "meilleure échelle possible".

La recherche d'une partie libre maximale revient à celle d'une *clique* maximale d'un graphe (i.e. ensemble maximal de sommets dont deux quelconques sont reliés par un arc); pour le voir, associons à la restriction (Λ, U') à Λ du graphe $G = (\Omega, U)$, l'anti-graphe (Λ, \bar{U}') obtenu en supprimant tout arc de U' et en posant un arc sur tout couple de sommets non reliés par un tel arc pour U' ; en d'autres termes, $\bar{U}' = \Lambda \times \Lambda - U'$, en représentant chaque arc orienté par le couple de sommets qu'il joint. Dans ces conditions, une partie libre de Λ n'est autre qu'une clique de la fermeture transitive du graphe (Λ, \bar{U}') (on rappelle que la fermeture transitive d'un graphe G est le graphe H obtenu en reliant d'un arc tout couple de sommets pouvant être reliés par un chemin de G).

Néanmoins nous n'utiliserons pas un algorithme général de recherche d'une clique maximale dans un graphe et préférons nous en tenir à la na-

ture du problème étudié où $\Lambda = \{\omega/\omega \in \Omega \text{ et } n_\omega \neq 0\}$ apparaît comme une partie du produit fini $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_m$ d'ordres totaux finis.

Il est clair qu'un même niveau $T(s)$ du treillis forme une partie libre ; nous établissons un théorème (voir annexe) permettant d'énumérer $T(s)$ et d'étudier le sens de variation de $\ell(s) = \text{card}\{T(s)\}$, $0 \leq s \leq r_1 + r_2 + \dots + r_m$.

Dans le cas où chacun des Ω_i comporte exactement deux éléments : $r_j = 1$, pour tout j , $1 \leq j \leq m$; $\ell(s)$ est le coefficient binomial $\binom{m}{s}$. Le lemme de Sperner montre que toute partie libre a un cardinal au plus égal à $\binom{m}{[m/2]}$; par conséquent le niveau médian $T([m/2])$ est une partie libre maximale. Une généralisation du lemme de Sperner (voir annexe) permet d'établir que le niveau médian du treillis Ω , $T([r/2])$ où $r = r_1 + \dots + r_m$, de cardinal le plus élevé, est une partie libre maximale.

Pour des raisons statistiques, on peut s'attendre à ce qu'une partie libre maximale de $\Lambda = \{\omega/\omega \in \Omega \text{ et } n_\omega \neq 0\}$, se situe au "voisinage" du niveau médian du treillis Ω ; d'où l'algorithme suivant de détermination des échelles d'attitude d'une population donnée par rapport à la suite des items totaux ($a^j/1 \leq j \leq m$).

1) On peut commencer par exclure de Λ tout sommet correspondant à un patron de réponse observé dont la fréquence est trop faible en regard de la fréquence des patrons de réponse observés de même score ; en d'autres termes, si la mesure charge le niveau $T(s)$ de la masse $\mu(s) = \sum_{\omega \in T(s)} n_\omega$, on ôtera de Λ tout sommet ω pour lequel $n_\omega < \alpha \mu(s(\omega))$, où α est un seuil à fixer ; un tel sommet pouvant correspondre à une erreur de réponse.

2) On détermine le niveau $T(s)$ comportant le plus grand nombre de points de Λ ; il s'agira en général d'un niveau $T(s_0)$ proche du niveau médian. L'ensemble des sommets de Λ qui appartiennent à $T(s_0)$ forme une partie libre de Λ qu'on cherchera à accroître en lui adjoignant une suite de points ; chacun incomparable avec chacun des sommets déjà retenus. Pour le "grossissement" de la partie libre de $T(s_0)$, on explorera les sommets du treillis niveau après niveau à partir de $T(s_0)$ et, alternativement, de part et d'autre. On finira ainsi par constituer une partie libre L_0 de Λ , de cardinal élevé, en général, pour des raisons statistiques, maximale.

3) Pour chacun des sommets de la partie libre L_0 , on cherchera à faire passer la "meilleure" échelle au moyen d'un algorithme sous-optimal utilisant celui, optimal, (établi au paragraphe III.2) de la façon suivante : a un sommet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_m)$ de L_0 , on associe deux sous-treillis de même nature que celui défini sur Ω ; le premier Ω^1 d'origine 0 et d'extrémité λ et le second Ω^2 d'origine λ et d'extrémité I. Ω^1 (resp. Ω^2) est le produit d'ordres totaux $\prod_{1 \leq j \leq m} \Omega_j^1$ (resp. $\prod_{1 \leq j \leq m} \Omega_j^2$) où Ω_j^1 (resp. Ω_j^2) est

l'intervalle commençant $[0, \lambda_j]$ (resp. finissant $[\lambda_j, r_j]$). On applique alors deux fois l'algorithme optimal (§ III 2.4) ; la première à Ω^1 et la seconde à Ω^2 formant ainsi les deux tronçons de la "meilleure" échelle passant par le sommet λ . La distance qui nous paraît la plus adéquate à utiliser ici est d_2 .

Il est clair que, pour asseoir l'approche méthodologique de ce chapitre, une importante expérimentation soit nécessaire ; toutefois, comme nous le signalions dans l'introduction, des résultats très significatifs ont été obtenus, dans le cadre d'une enquête psycho-pédagogique, au moyen de l'algorithme (§ III 2.4), avec l'usage de la distance d_2 .

ANNEXE

V - SUR QUELQUES QUESTIONS COMBINATOIRES LIEES AU TREILLIS DE REPRESENTATION.

1. NOMBRE DE CHAINES MAXIMALES ENTRE DEUX SOMMETS DU TREILLIS.

Soit $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_j \times \dots \times \Omega_m$; produit direct de m ordres totaux finis où $\text{card}(\Omega_j) = r_j + 1$. Rappelons que pour simplifier la visualisation, nous avons adopté de Ω , la représentation géométrique par le paralléloèdre de $\mathbb{N}^m : [0, r_1] \times [0, r_2] \times \dots \times [0, r_m]$; et ce, en associant à Ω_j l'intervalle commençant $[0, r_j]$ de \mathbb{N} dont nous ne retiendrons que la structure ordinale. De la sorte, un sommet $\omega \in \Omega$ est figuré par un point $(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_m)$ où $0 \leq \omega_j \leq r_j$, de \mathbb{N}^m .

Soient ω et ω' deux sommets du treillis représentés par les deux points suivants du paralléloèdre : $(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_m)$ et $(\omega'_1, \dots, \omega'_j, \dots, \omega'_m)$. Posons $\delta_j = \omega'_j - \omega_j$, pour tout j ; $1 \leq j \leq m$. La relation $\omega < \omega'$, qui s'exprime par $\delta_j > 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$, signifie l'existence d'au moins une chaîne d'origine ω et d'extrémité ω' . Dans ce cas, toutes les chaînes maximales reliant ω à ω' ont la même longueur à savoir

$$l(\omega, \omega') = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m ; \quad (1)$$

le nombre de telles chaînes étant

$$\frac{(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_m)!}{\delta_1! \delta_2! \dots \delta_m!} . \quad (2)$$

Pour le voir et en faisant image, considérons un promeneur disposé au point ω et destiné à parvenir jusqu'à ω' en empruntant des pas "orientés" \vec{v}_j , $1 \leq j \leq m$; où \vec{v}_j est le vecteur unité porté par le j -ème axe de représentation associé à Ω_j . Ce promeneur a le choix entre

$(\delta_1 + \dots + \delta_m)! / \delta_1! \dots \delta_m!$ cheminements, tous de même longueur $\delta_1 + \dots + \delta_m$.

Il en résulte que le nombre de chaînes maximales reliant les extrémités du treillis est égal à

$$\frac{(r_1+r_2+\dots+r_m)!}{r_1!r_2!\dots r_m!} ; \quad (3)$$

que de plus, parmi ces dernières, le nombre de celles traversant le point (k_1, k_2, \dots, k_m) est égal à

$$\frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!k_2!\dots k_m!} \times \frac{[(r_1-k_1)+(r_2-k_2)+\dots+(r_m-k_m)]!}{(r_1-k_1)!(r_2-k_2)!\dots(r_m-k_m)!}$$

$$= \frac{k!(r-k)!}{r_1!r_2!\dots r_m!} \binom{r_1}{k_1} \binom{r_2}{k_2} \dots \binom{r_m}{k_m} ; \quad (4)$$

où on a posé $r = r_1+r_2+\dots+r_m$ et $k = k_1+k_2+\dots+k_m$.

2. THEOREME DE DILWORTH.

Nous avons montré au paragraphe IV le rôle important du théorème de Dilworth en analyse hiérarchique multidimensionnelle ; nous donnerons de ce théorème l'élégante démonstration de Tverberg (cf. [10]).

THEOREME. *Λ étant un ensemble fini partiellement ordonné, le nombre minimum de chaînes recouvrant Λ est égal au cardinal d'une partie libre maximale.*

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal de l'ensemble. On suppose par conséquent la propriété vraie pour tout sous ensemble de Λ de cardinal inférieur ou égal à $(\lambda-1)$ où $\lambda = \text{card}(\Lambda)$. Posons

$$\beta = \max_{L \in \mathcal{L}} \text{card}(L) ,$$

où \mathcal{L} est l'ensemble des parties libres de Λ , pour établir qu'il existe une partition de Λ en β chaînes.

Soit Γ une chaîne maximale ; deux cas se présentent

a) Γ rencontre toute partie libre maximale (de cardinal β).

Il en résulte que sur l'ensemble $(\Lambda-\Gamma)$, on a $\max_{L \in \mathcal{L}} \text{card}(L) = (\beta-1)$.

En vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut recouvrir $(\Lambda-\Gamma)$ au moyen de $(\beta-1)$ chaînes ; lesquelles avec Γ recouvrent Λ .

b) Γ ne rencontre pas toute partie libre maximale.

Dans ces conditions, il existe une partie libre $L_0 = \{\omega_0^1, \omega_0^2, \dots, \omega_0^\beta\}$ de cardinal β dans $(\Lambda-\Gamma)$. Définissons

$$\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda / \lambda \geq \omega_0^i \text{ pour au moins un } i, 1 \leq i \leq \beta\}$$

et

$$\Lambda^- = \{\lambda \in \Lambda / \lambda \leq \omega_0^i \text{ pour au moins un } i, 1 \leq i \leq \beta\} .$$

On a manifestement

$$\Lambda^+ \cup \Lambda^- = \Lambda \quad \text{et} \quad \Lambda^+ \cap \Lambda^- = L_0 .$$

Désignons par γ^- et γ^+ les extrémités de la chaîne maximale Γ ($\gamma^- \leq \gamma^+$). On a nécessairement $\gamma^+ \notin \Lambda^-$; car sinon il existerait i tel que $\gamma^+ \leq \omega_0^i$ et γ^+ ne peut être l'extrémité de la chaîne maximale Γ puisque cette dernière ne rencontre pas L_0 . De la même manière, on ne peut avoir $\gamma^- \in \Lambda^+$. Il en résulte que $\text{card}(\Lambda^-) \leq \ell-1$ et $\text{card}(\Lambda^+) \leq \ell-1$.

En faisant jouer alors l'hypothèse de récurrence on couvrira Λ^- (resp. Λ^+) par β chaînes dont celle qui contient ω_0^i est notée Γ_i^- (resp. Γ_i^+). ω_0^i est nécessairement le plus grand élément de Γ_i^- ; sinon, c'est qu'il existe $\lambda \in \Gamma_i^- \subset \Lambda^-$, tel que $\lambda > \omega_0^i$; c'est impossible, car pour un certain indice i' , on a $\lambda \leq \omega_0^{i'}$ et on aurait $\omega_0^i < \omega_0^{i'}$! De la même façon ω_0^i est nécessairement le plus petit élément de Γ_i^+ . Par conséquent pour tout i , $\Gamma_i^- \cup \Gamma_i^+$ est une chaîne et Λ est recouvert par la suite des β chaînes $(\Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+, \Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+, \dots, \Gamma_\beta^- \cup \Gamma_\beta^+)$. C.Q.F.D.

3. FONCTION ENUMERATIVE D'UN NIVEAU DU TREILLIS.

Désignons par $T(s; r_1, \dots, r_m)$ ou plus brièvement par $T(s)$, le niveau de rang s du treillis Ω produit direct de m chaînes; la j -ème Ω_j comportant (r_j+1) éléments. Posons

$$\ell(s) = \text{card}(T(s; r_1, \dots, r_m)) \text{ et } r = r_1 + r_2 + \dots + r_m. \quad (1)$$

THEOREME. La fonction $\ell(s)$ définie sur l'intervalle $I = [0, 1, \dots, r]$ de \mathbb{N} est symétrique par rapport au milieu du segment I ; soit $\ell(s) = \ell(r-s)$.

Cette fonction est strictement croissante pour $s < \min(r_m, \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j)$.

De plus si

$$a) \quad r_m > \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j, \quad \ell(s) \text{ est constante pour } \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j \leq s \leq \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor.$$

$$b) \quad r_m \leq \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j, \quad \ell(s) \text{ reste croissante au sens large, pour } r_m \leq s < \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor.$$

Enfin, en posant

$$v = \binom{s+m-1}{m-1} \text{ et } v(j_1, j_2, \dots, j_h) = \binom{s - \sum_{1 \leq k \leq h} r_{j_k} - h + m - 1}{m-1};$$

on a

$$\begin{aligned} \ell(s) = v - \sum_{1 \leq j \leq i} v(j) + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq i} v(j_1, j_2) + \dots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_h \leq i} v(j_1, \dots, j_h) \\ + \dots + (-1)^i v(1, 2, \dots, i) \end{aligned}$$

si $r_i \leq s \leq r_{i+1}$.

Preuve. Compte tenu de la représentation géométrique de Ω ; $T(s; r_1, \dots, r_m)$ est représenté par l'ensemble suivant des points de \mathbb{N}^m

$\{x/x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m, x_1 + x_2 + \dots + x_m = s \text{ et } 0 \leq x_j \leq r_j, \text{ pour tout } j\}$; lequel, peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\{y/y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{N}^m, y_1 + y_2 + \dots + y_m = r - s \text{ et } 0 \leq y_j \leq r_j, \text{ pour tout } j\}$ au moyen de l'application

$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto y = (y_1, \dots, y_m)$ où $y_j = r_j - x_j$, pour tout j .
Le second ensemble représentant $T(r-s)$; on a

$$\ell(s) = \ell(r-s) ;$$

c'est-à-dire, la symétrie de la fonction ℓ .

Nous allons maintenant établir la stricte croissance de la fonction $\ell(s)$ sur l'intervalle $[0, \rho]$ où $\rho = \min(r_m, \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j)$. Soit en effet $s < \rho$; on a $s < r_m$ et $s < \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j$. Considérons dans ces conditions, l'application de $T(s)$ dans $T(s+1)$ qui au point (x_1, x_2, \dots, x_m) de $T(s)$ associe le point $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m + 1)$ qui appartient bien à $T(s+1)$ car

$$s < r_m \implies x_m + 1 \leq r_m .$$

Cette application est manifestement injective ; il s'agit, en utilisant le vocabulaire des graphes, d'un "couplage" de $T(s)$ dans $T(s+1)$. D'après cette correspondance $\ell(s+1)$ excède $\ell(s)$ de $\text{card}\{T(s+1) \cap \{x/x_m = 0\}\}$:

cardinal de la partie de $T(s+1)$ formée des points dont la dernière composante est nulle. Or il est clair que cette partie peut être mise en correspondance bijective avec l'ensemble $T(s+1; r_1, \dots, r_{m-1})$ qui est le niveau de rang $(s+1)$ relativement au produit direct des $(m-1)$ premiers ordres totaux ; le cardinal de cet ensemble n'étant nul que si $s \geq \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j$.

Il en résulte que si $\sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j < r_m$, la fonction $\ell(s)$ reste constante pour

$$\sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j \leq s < r_m ;$$

dans ce cas, r_m est nécessairement supérieur ou égal à la partie entière de $(r+1)/2$;

$$r_m \geq [(r+1)/2] .$$

D'où, le résultat a) du théorème.

Il reste à envisager le cas (b) où $r_m < \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j$ et pour s variant dans l'intervalle

$$r_m \leq s < \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j ;$$

la borne supérieure de cet intervalle étant nécessairement à droite de

$[(r+1)/2]$. Considérons la décomposition suivante de l'ensemble $T(s; r_1, \dots, r_m)$:

$$T(s; r_1, \dots, r_m) = T(s; r_1, \dots, r_m) \cap \{x/x_m = r_m\} + T(s; r_1, \dots, r_m) \cap \{x/x_m < r_m\} .$$

Le premier des deux ensembles de la décomposition peut se mettre en correspondance bijective avec $T(s-r_m; r_1, \dots, r_{(m-1)})$ et le second avec $T(s+1; r_1, \dots, r_m) \cap \{x/x_m \neq 0\}$. La première correspondance résulte de l'application

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m) \mapsto y = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$$

et la seconde, de l'application

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto y = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}) .$$

Nous allons dans ces conditions établir le résultat par récurrence sur la dimension m . D'après la décomposition précédente, on a en effet $\text{card}\{T(s+1; r_1, \dots, r_m)\} - \text{card}\{T(s; r_1, \dots, r_m)\}$

$$= \text{card}\{T(s+1; r_1, \dots, r_{m-1})\} - \text{card}\{T(s-r_m; r_1, \dots, r_{m-1})\}$$

en raison de la bijection qu'on peut établir entre

$$T(s+1; r_1, \dots, r_m) \cap \{x/x_m = 0\} \text{ et } T(s+1; r_1, \dots, r_{m-1}).$$

On suppose par conséquent que la fonction $\lambda(s) = \text{card}(T(s; r_1, \dots, r_d))$ est croissante pour $d \leq (m-1)$ sur l'intervalle $s < \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq d} r_j$.

On a

$$s < \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq m} r_j \implies \begin{cases} s - r_m < \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - \frac{r_m}{2} & (1) \\ \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - (s+1) \geq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - \frac{r_m}{2} , & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) impliquent

$$s - r_m < \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - (s+1) , \quad (3)$$

et on a évidemment

$$s - r_m < s+1 . \quad (4)$$

L'un des deux nombres entiers, $s+1$ et $\sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - (s+1)$, qui représentent les seconds membres des inégalités (3) et (4), est nécessairement inférieur à $\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j$; leur somme étant égale à $\sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j$. D'autre part, en raison de la symétrie de la fonction $\lambda(s)$; $\text{card}\{T(s+1; r_1, \dots, r_{m-1})\} = \text{card}\{T(\sum_{1 \leq j \leq (m-1)} r_j - (s+1); r_1, \dots, r_m)\}$.

Donc, de toute façon, d'après l'hypothèse de récurrence,
 $\text{card}\{T(s-r_m; r_1, \dots, r_{m-1})\} \leq \text{card}\{T(s+1; r_1, \dots, r_{m-1})\}$; C.Q.F.D.

Il nous reste enfin à établir l'expression de la fonction énumérative $\ell(s)$; ou pour être plus précis, $\ell(s; r_1, \dots, r_m)$.

Il est facile de voir que $\ell(s; r_1, \dots, r_m)$ est le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + \dots + x_j + \dots + x_m = s, \quad (1')$$

pour lesquelles $x_j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x_j \leq r_j$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$

Supposons, sans restreindre en rien la généralité de la question, que

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_j \leq \dots \leq r_m ;$$

la forme de $\ell(s)$ est différente selon la position de s par rapport aux valeurs r_j .

a) $s < r_1$.

L'ensemble de solutions de l'équation (1') où $x_j \in \mathbb{N}$ pour tout j , est inclus dans le cube $\{0, 1, 2, \dots, s\}^m$ qui est contenu dans le parallélotope $\prod_{1 \leq j \leq m} \{0, 1, 2, \dots, r_j\}$; nous n'avons donc pas à nous occuper en cherchant le nombre de solutions de (1') des contraintes $x_j \leq r_j$ pour $j = 1, 2, \dots, m$.

Posons pour tout $j = 1, 2, \dots, m$, $y_j = x_j + 1$; le nombre cherché est le nombre de solutions de l'équation

$$y_1 + y_2 + \dots + y_j + \dots + y_m = s + m, \quad (2')$$

pour lesquelles $y_j \in \mathbb{N}$ et $y_j > 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, m$.

Posons $\sigma_n = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j$ où $n \leq m$. La correspondance

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m),$$

entre une suite finie et celle de ses sommes partielles, réalise une bijection entre l'ensemble des solutions de (2'), pour lesquelles y_j est un entier strictement positif pour tout j , et l'ensemble de toutes les suites d'entiers $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ pour lesquelles

$$1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_{m-1} < \sigma_m = s + m.$$

Le nombre de solutions est donc le nombre de suites strictement croissantes de $(m-1)$ valeurs parmi $\{1, 2, \dots, (s+m-1)\}$; ce nombre est le coefficient binomial

$$v = \binom{s+m-1}{m-1} = \binom{s+m-1}{s} = \frac{(s+m-1)!}{s!(m-1)!}. \quad (3')$$

$$b) \underline{r_i \leq s < r_{i+1}} .$$

Pour obtenir le nombre de solutions de (1') pour lesquelles l'entier positif x_j est, pour tout j , inférieur ou égal à r_j , il s'agit d'ôter du nombre $\binom{s+m-1}{m-1}$ exprimé par la formule (3'), le nombre de solutions de (1') pour lesquelles il existe *au moins* un indice j_0 pour lequel, le nombre entier positif x_{j_0} , est strictement supérieur à r_{j_0} ($x_{j_0} > r_{j_0}$).

Cherchons dans ces conditions à énumérer l'ensemble des solutions de (1') pour lesquelles $x_j \in \mathbb{N}$ pour tout j et $x_{j_0} > r_{j_0}$.

Aux deux membres de l'équation (1') retranchons $(r_{j_0} + 1)$ pour obtenir

$$x_1 + x_2 + \dots + (x_{j_0} - r_{j_0} - 1) + \dots + x_m = s - r_{j_0} - 1 . \quad (4')$$

En posant $z_j = x_j$ (resp. $x_{j_0} - r_{j_0} - 1$) pour $j \neq j_0$ (resp. $j = j_0$) ; l'équation (4') s'écrit

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{j_0} + \dots + z_m = s - r_{j_0} - 1 . \quad (5')$$

L'ensemble des solutions de (1') pour lesquelles $x_j \in \mathbb{N}$ pour tout j et $x_{j_0} > r_{j_0}$ peut être mis en correspondance bijective avec l'ensemble des solutions de (5') pour lesquelles $z_j \in \mathbb{N}$, pour tout j . Ce dernier ensemble, nous l'avons vu, a pour cardinal

$$v(j_0) = \binom{s - r_{j_0} - 1 + (m-1)}{m-1} = \frac{(s + m - r_{j_0} - 2)!}{(s - r_{j_0} - 1)! (m-1)!} . \quad (6')$$

Plus généralement, on montre de la même façon, que le nombre de solutions de l'équation (1') pour lesquelles

$$x_{j_1} > r_{j_1}, x_{j_2} > r_{j_2}, \dots, x_{j_h} > r_{j_h} ,$$

où $\{j_1, j_2, \dots, j_h\}$ est une partie de cardinal h de l'ensemble $\{1, 2, \dots, i\}$ des indices, est égal à

$$v(j_1, j_2, \dots, j_h) = \binom{s - \sum_{1 \leq \ell \leq h} r_{j_\ell} - h + m - 1}{m-1} . \quad (7')$$

Le nombre que nous cherchons, soit le cardinal de $T(s; r_1, \dots, r_m)$ pour $s \in [r_i, r_{i+1}[$, se met, en vertu de la formule d'inclusion et d'exclusion, sous la forme suivante

$$v = \sum_{\{j\}} v_j + \sum_{\{j_1, j_2\}} v(j_1, j_2) - \sum_{\{j_1, j_2, j_3\}} v(j_1, j_2, j_3) + \dots$$

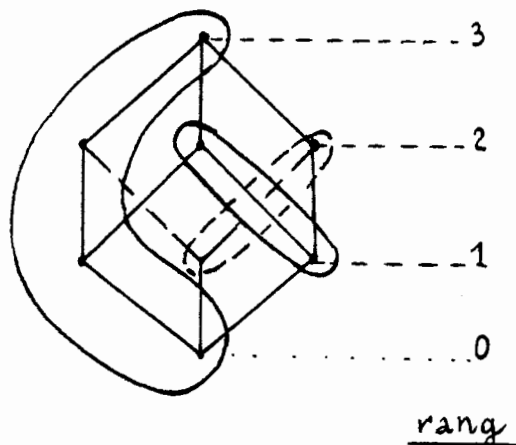
$$\dots + (-1)^h \sum_{\{j_1, \dots, j_h\}} v(j_1, \dots, j_h) + \dots + (-1)^i v(1, 2, \dots, i); \quad (8')$$

où la h-ème somme est étendue à l'ensemble des parties de cardinal h de $\{1, 2, \dots, i\}$. C.Q.F.D.

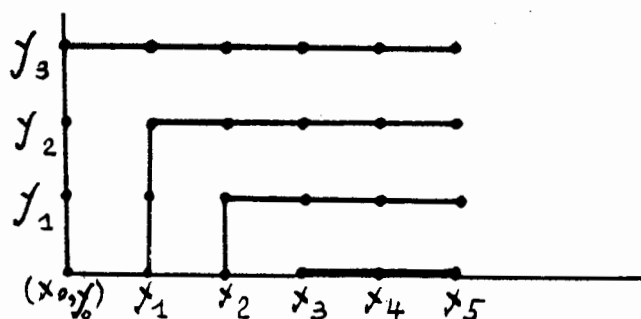
Pour avoir l'expression de $\ell(s; r_1, \dots, r_m)$ pour $s \geq r_m$; il suffit de faire $i = m$ dans la formule (8') précédente.

4. GENERALISATION DU LEMME DE SPERNER.

Nous aurons besoin ici d'une notion intermédiaire; celle d'un ensemble *ordonné C-symétrique*. Un ensemble gradué ordonné est C-symétrique s'il est décomposable en chaînes (qui forment une partition de cet ensemble) telles que, pour chacune d'entre elles, la somme des rangs des sommets extrêmes est constante. Ainsi, nous avons ci-dessous représenté une telle décomposition en chaînes du cube associé à l'ensemble des parties d'un ensemble à 3 éléments.



Soient $C = (x_0, x_1, \dots, x_p)$ et $D = (y_0, y_1, \dots, y_q)$ deux chaînes; alors $C \times D$ est C-symétrique pour l'ordre produit où on a, en effet, une décomposition de $C \times D$ en chaînes de la forme



avec ici $p=5$ et $q=3$; ainsi, la suite des chaînes permettant cette décomposition s'écrit de façon générale

$$\begin{array}{c}
 (x_0, y_0), (x_0, y_1), \dots, (x_0, y_q), \dots, (x_p, y_q) \\
 (x_1, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_1, y_{q-1}), \dots, (x_p, y_{q-1}) \\
 (x_2, y_0), (x_2, y_1), \dots, (x_2, y_{q-2}), \dots, (x_p, y_{q-2}) \\
 \hline
 (x_q, y_0), \dots, (x_p, y_0)
 \end{array}$$

En rappelant que si deux ensembles finis X et Y ordonnés sont gradués, leur produit $X \times Y$ l'est ; avec $r(x, y) = r(x) + r(y)$ pour tout couple (x, y) de $X \times Y$; on a pour la somme des rangs des extrémités d'une même chaîne de la décomposition précédente de $C \times D$

$$\begin{aligned}
 r(x_0, y_0) + r(x_p, y_q) &= r(x_0) + r(x_p) + r(y_0) + r(y_q) \\
 &= r(C) + r(D) .
 \end{aligned}$$

Notons enfin que si Ω et Ω' sont deux ensembles gradués ordonnés C -symétriques ; il en est de même de $\Omega \times \Omega'$; en effet, étant données les décompositions en chaînes, respectives de Ω et Ω' , correspondantes à la C -symétrie :

$$\Omega = \sum_{i \in I} C_i \quad \text{et} \quad \Omega' = \sum_{j \in J} C'_j ,$$

on a,

$$\Omega \times \Omega' = \sum_{(i, j) \in I \times J} C_i \times C'_j$$

et on vient de voir que $C_i \times C'_j$ est C -symétrique.

THEOREME (cf. [3]). *L'ordre produit défini sur le produit direct de chaînes est de Sperner.*

Nous venons de voir au paragraphe 3 précédent que le niveau médian du treillis : produit direct de chaînes, est celui comportant le plus grand nombre de sommets ; d'autre part chacun des niveaux définit une partie libre et il s'agit de prouver que le niveau médian constitue une partie libre maximale. L'ensemble ordonné défini par le treillis étant C -symétrique ; considérons une décomposition associée en chaînes. Chacune des ces chaînes passe par exactement un point du niveau médian. En raison du théorème de Dilworth, le cardinal de toute partie libre est inférieur ou égal au nombre de ces chaînes. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BARBUT, "Echelles à distances minimum d'une partie donnée d'un treillis distributif fini", Rev. Math. 1, Sc. Hum. n° 18 (Juin 1967).
- [2] C. BERGE, "Graphes et Hypergraphes", Dunod, Paris, 1970.
- [3] N. G. DEBRUIJN, C. A. Van E. TENGBERGEN, D. KRUIJSWIJK, "On the set of divisors of a number", Nieuw. Arch. Wiskunde (2), 23, 1949-51 (191-193).
- [4] R. P. DILWORTH, "A decomposition theorem for partially ordered sets" Ann. of Math., 60, 2, 1954 (359-364).
- [5] I. C. LERMAN, "Essai sur l'Analyse Hiérarchique", Rap. int./15/Juin 66/ Centre de Calcul (Maison des Sciences de l'Homme) et Revue Math. & Sc. Hum. n° 17 (1967).
- [6] B. MATALON, "L'Analyse Hiérarchique", Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [7] B. MONJARDET, "Problèmes de transversalité dans les Hypergraphes, les ensembles ordonnés et en Théorie de la Décision collective", Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Paris VI, Juin 1974.
- [8] E. SPERNER, "Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge", Math. Z., 27, 1928 (544-548).
- [9] W. S. TORGERSON, "Theory and methods of scaling", Wiley, 1958.
- [10] TVERBERG, "On Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets", Annals of Math., 51, 1950 (161-166).